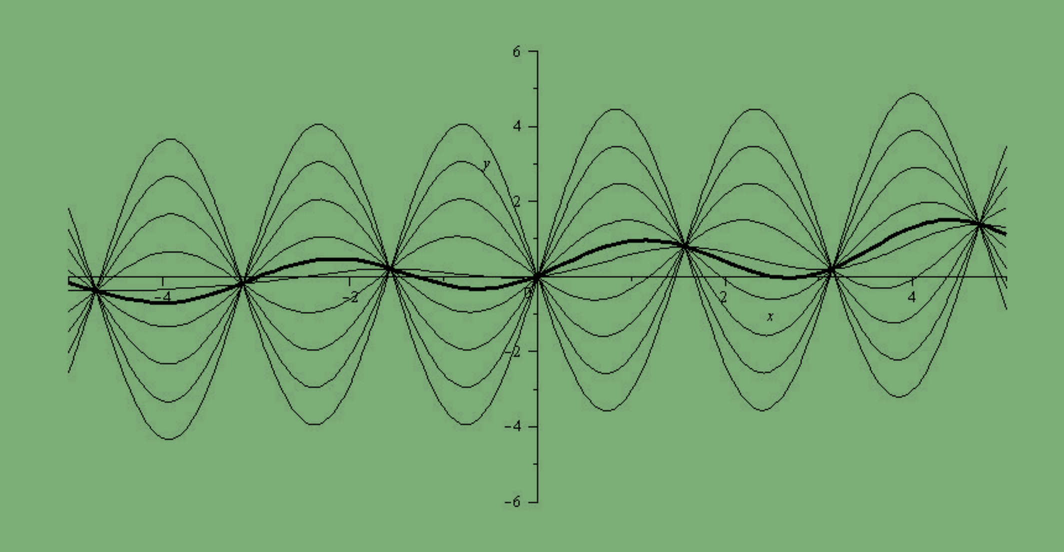
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE ORDEN SUPERIOR (I).

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

por

M. ESTHER PATIÑO RODRÍGUEZ
PEDRO GALÁN DEL SASTRE



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-88-03

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE ORDEN SUPERIOR (I).

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

por

M. ESTHER PATIÑO RODRÍGUEZ
PEDRO GALÁN DEL SASTRE

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-88-03

C U A D E R N O S
D E L   I N S T I T U T O
J U A N   D E   H E R R E R A

NUMERACIÓN

2 Área
51 Autor
09 Ordinal de cuaderno (del autor)

TEMAS

1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN
0 VARIOS

Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior (I).
Métodos de resolución.

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Almudena Gil Sancho.
CUADERNO 402.01 / 3-88-03
ISBN-13 (obra completa): 978-84-9728-461-5
ISBN-13: 978-84-9728-462-2
Depósito Legal: M-15480-2013

Índice general

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Orden Superior

1. Conceptos básicos

En este tema estudiaremos ecuaciones diferenciales lineales de orden mayor que uno. En concreto, si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo de la recta real y a_i, $b : I \to \mathbb{R}$ son funciones reales, para $0 \leq i \leq n$, con $a_n(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, nos centraremos en aquellas ecuaciones diferenciales que se puedan escribir de la siguiente forma:

$$a_n(x)\, u^{(n)}(x) + \cdots + a_2(x)\, u''(x) + a_1(x)\, u'(x) + a_0(x)\, u(x) = b(x) \qquad \forall x \in I. \qquad (P)$$

A las funciones a_i se les denomina ***coeficientes de la ecuación diferencial lineal***. En el caso en el que $a_i(x) \equiv a_i \in \mathbb{R}$ para todo $0 \leq i \leq n$ se dice que la ecuación diferencial es de ***coeficientes constantes***. Cuando la función $b \equiv 0$ se dice que la ecuación diferencial es ***homogénea***, es decir,

$$a_n(x)\, u^{(n)}(x) + \cdots + a_2(x)\, u''(x) + a_1(x)\, u'(x) + a_0(x)\, u(x) = 0 \qquad \forall x \in I. \qquad (P_H)$$

En lo que sigue, llamaremos (P) a la ecuación diferencial lineal no homogénea y (P_H) a la ecuación diferencial homogénea asociada.

En primer lugar analizaremos si una ecuación diferencial de este tipo tiene solución así como cuantas soluciones puede presentar. Para ello introducimos algunos conceptos y resultados que nos ayudarán a entender la naturaleza de las soluciones de (P).

Teorema 1.1 *Si $a_0, a_1, \ldots, a_n, b$ son funciones continuas en I, con $a_n(x) \neq 0$ para todo $x \in I$ y si $x_0 \in I$, entonces existe una única solución, u, del* ***problema de valor inicial****,* P.V.I.,

$$\begin{cases} a_n(x)\, u^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x)\, u'(x) + a_0(x)\, u(x) = b(x) \\ u(x_0) = \alpha_0, u'(x_0) = \alpha_1, \ldots, u^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1} \end{cases}$$

con $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Definición 1.2 *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sean $f_1, f_2, \ldots, f_m : I \to \mathbb{R}$ m funciones. Se dice que $f_1, f_2, \ldots, f_m$ son* ***linealmente dependientes*** *en I si $\exists\, c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$, no todos nulos, tal que*

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_m f_m(x) = 0 \qquad \forall x \in I.$$

Se dice que $f_1, f_2, \ldots, f_m$ son ***linealmente independientes*** *cuando no son linealmente dependientes.*

Puesto que las ecuaciones diferenciales (P) y (P_H) son lineales, se deducen las siguientes propiedades:

Proposición 1.3 *La combinación lineal de dos soluciones de (P_H) también es solución de (P_H).*

Demostración.
Sean u_1 y u_2 dos soluciones de (P_H), sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y sea $w = \alpha u_1 + \beta u_2$. Entonces,

$$\begin{aligned}
&a_n(x) w^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x) w'(x) + a_0(x) w(x) \\
&\quad = a_n(x)(\alpha u_1(x) + \beta u_2(x))^{(n)} + \cdots + a_1(x)(\alpha u_1(x) + \beta u_2(x))' \\
&\qquad + a_0(x)(\alpha u_1(x) + \beta u_2(x)) \\
&\quad = a_n(x)\left(\alpha u_1^{(n)}(x) + \beta u_2^{(n)}(x)\right) + \cdots + a_1(x)(\alpha u_1'(x) + \beta u_2'(x)) \\
&\qquad + a_0(x)(\alpha u_1(x) + \beta u_2(x)) \\
&\quad = \alpha\left(a_n(x) u_1^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x) u_1'(x) + a_0(x) u_1(x)\right) \\
&\qquad + \beta\left(a_n(x) u_2^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x) u_2'(x) + a_0(x) u_2(x)\right) = 0.
\end{aligned}$$

■

Proposición 1.4 *Si u_1 y u_2 son dos soluciones de (P), entonces $w = u_1 - u_2$ es solución de (P_H).*

Demostración.

$$\begin{aligned}
&a_n(x) w^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x) w'(x) + a_0(x) w(x) \\
&\quad = a_n(x)(u_1(x) - u_2(x))^{(n)} + \cdots + a_1(x)(u_1(x) - u_2(x))' + a_0(x)(u_1(x) - u_2(x)) \\
&\quad = a_n(x)\left(u_1^{(n)}(x) - u_2^{(n)}(x)\right) + \cdots + a_1(x)(u_1'(x) - u_2'(x)) + a_0(x)(u_1(x) - u_2(x)) \\
&\quad = \left(a_n(x) u_1^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x) u_1'(x) + a_0(x) u_1(x)\right) \\
&\qquad - \left(a_n(x) u_2^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x) u_2'(x) + a_0(x) u_2(x)\right) \\
&\quad = b(x) - b(x) = 0.
\end{aligned}$$

■

Proposición 1.5 *Si u_P es una solución de (P), entonces cualquier solución u de (P) verifica que $u = u_P + u_H$, donde u_H es una solución de (P_H).*

Demostración. Sea u una solución de (P) y sea $u_H = u - u_P$, entonces, como u y u_P son soluciones de (P), por la Proposición 1.4 se tiene que u_H es solución de (P_H), y por tanto u se puede escribir como suma de u_P más una solución de (P_H). ■

Observación 1.6 *Esta proposición proporciona un método para calcular todas las soluciones de (P) a partir de una **solución particular** (esto es, una función concreta que verifica (P)) y de todas las soluciones de (P_H). Por tanto, en lo que sigue estudiaremos la estructura de las soluciones de (P_H) y posteriormente describiremos métodos para encontrar una solución particular de (P).*

Definición 1.7 *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sean $f_1, f_2, \ldots, f_m : I \to \mathbb{R}$ m funciones que poseen al menos $m-1$ derivadas en I. Se define el* ***Wronskiano*** *de este conjunto de funciones como la función:*

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_m)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_m(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_m'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(m-1)}(x) & f_2^{(m-1)}(x) & \cdots & f_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Proposición 1.8 *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sean $f_1, f_2, \ldots, f_m : I \to \mathbb{R}$ m funciones que poseen al menos $m-1$ derivadas en I. Entonces,*

$$\{f_1, f_2, \ldots, f_m\} \text{ es linealmente independiente } \iff \exists\, x_0 \in I \text{ t.q. } W(f_1, f_2, \ldots, f_m)(x_0) \neq 0.$$

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos que $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ es linealmente independiente.
Razonando por el método de reducción al absurdo, supongamos que $W(f_1, f_2, \ldots, f_m)(x) = 0\ \forall x \in I$. Puesto que el determinante que define el Wronskiano es cero para todo $x \in I$, la última columna se puede escribir como combinación lineal del resto de columnas, lo que implica, en particular, que $\exists\, c_1, c_2, \ldots, c_{m-1} \in \mathbb{R}$, no todos nulos, tales que

$$f_m(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots c_{m-1} f_{m-1}(x) \qquad \forall x \in I,$$

lo que contradice la hipótesis de partida.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\exists\, x_0 \in I$ t.q. $W(f_1, f_2, \ldots, f_m)(x_0) \neq 0$.
Razonando de nuevo por reducción al absurdo, supongamos que $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ es linealmente dependiente. Entonces, $\exists\, c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$, no todos nulos, tales que

$$0 = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots c_m f_m(x) \qquad \forall x \in I,$$

y derivando,

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) + \ldots c_m f_m'(x), \\ &\ \vdots \\ 0 &= c_1 f_1^{(m-1)}(x) + c_2 f_2^{(m-1)}(x) + \ldots c_m f_m^{(m-1)}(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in I$; esto implica que el determinante de la definición del Wronskiano es nulo para todo $x \in I$ lo que contradice la hipótesis de partida. ■

Ejemplo 1.9 *Estudiar si son linealmente independientes los siguientes conjuntos de funciones en $\mathbb{R}$:*

(a) $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} = \{1, x, x^2\}$

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \not\equiv 0.$$

Por tanto, $\{1, x, x^2\}$ es un conjunto linealmente independiente.

(b) $\{f_1, f_2\} = \{e^x, e^{4x}\}$

$$W(f_1,f_2)(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{4x} \\ e^x & 4e^{4x} \end{vmatrix} = 3e^{5x} \not\equiv 0.$$

Por tanto, $\{e^x, e^{4x}\}$ es un conjunto linealmente independiente.

(c) $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\} = \{e^x, xe^x, x^2e^x\}$

$$\begin{aligned} W(\phi_1,\phi_2,\phi_3)(x) &= \begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x \\ e^x & (x+1)e^x & (x+2)xe^x \\ e^x & (x+2)e^x & (x^2+4x+2)e^x \end{vmatrix} = e^{3x} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x+1 & x^2+2x \\ 1 & x+2 & x^2+4x+2 \end{vmatrix} \\ &= e^{3x} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 2 & 4x+2 \end{vmatrix} = e^{3x}(4x+2-4x) = 2e^{3x} \not\equiv 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$ es un conjunto linealmente independiente.

(d) $\{g_1, g_2\} = \{\operatorname{sen} x, \cos x\}$

$$W(g_1,g_2)(x) = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ \cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix} = -\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = -1 \not\equiv 0.$$

Por tanto, $\{\operatorname{sen} x, \cos x\}$ es un conjunto linealmente independiente.

(e) $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\} = \{x^2-1, 1, x^2+x, x+1\}$

$$W(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)(x) = \begin{vmatrix} x^2-1 & 1 & x^2+x & x+1 \\ 2x & 0 & 2x+1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Por tanto, $\{x^2-1, 1, x^2+x, x+1\}$ es un conjunto linealmente dependiente.

Lema 1.10 *Sean $u_1, u_2, \ldots, u_n$ n soluciones de (P_H) en el intervalo I. Si $\exists x_0 \in I$ tal que $W(u_1,u_2,\ldots,u_n)(x_0) = 0$, entonces $W(u_1,u_2,\ldots,u_n)(x) = 0 \quad \forall x \in I$.*

Demostración.

Supongamos que $\exists x_0 \in I$ tal que $W(u_1,u_2,\ldots,u_n)(x_0) = 0$, entonces existen $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, no todos nulos, tales que

$$c_1u_1(x_0) + c_2u_2(x_0) + \cdots + c_nu_n(x_0) = 0.$$

Derivando $n-1$ veces,

$$\begin{gathered} c_1u_1'(x_0) + c_2u_2'(x_0) + \cdots + c_nu_n'(x_0) = 0, \\ \cdots \\ c_1u_1^{(n-1)}(x_0) + c_2u_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_nu_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{gathered}$$

Sea $u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \cdots + c_n u_n(x)$, entonces, $u(x_0) = u'(x_0) = \cdots = u^{(n-1)}(x_0) = 0$. Además, puesto que $u_1, u_2, \ldots, u_n$ son soluciones de (P_H), entonces, u es solución de (P_H) (Proposición 1.3). Por tanto u verifica el *P.V.I.* asociado a (P_H), con $u(x_0) = u'(x_0) = \cdots = u^{(n-1)}(x_0) = 0$. Puesto que el *P.V.I.* tiene solución única por el Teorema 1.1, se tiene que $u(x) = 0$ para todo $x \in I$, lo que implica que $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es un conjunto de funciones linealmente dependiente y por tanto $W(u_1, u_2, \ldots, u_n)(x) = 0 \quad \forall x \in I$. ■

Teorema 1.11 *Sean $u_1, u_2, \ldots, u_n$ n soluciones de (P_H) en el intervalo I. Entonces,*

$$\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \text{ es linealmente independiente } \iff W(u_1, u_2, \ldots, u_n)(x) \neq 0 \qquad \forall x \in I.$$

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos que $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es un conjunto de funciones linealmente independiente.

Razonando por el método de reducción al absurdo, supongamos que $\exists x_0 \in I$ tal que $W(u_1, u_2, \ldots, u_n)(x_0) = 0$, entonces, por el Lema 1.10, $W(u_1, u_2, \ldots, u_n)(x) = 0 \quad \forall x \in I$, lo que contradice la hipótesis inicial.

$\Leftarrow$) Supongamos que $W(u_1, u_2, \ldots, u_n)(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$.

Utilizando la Proposición 1.8 se tiene que $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es linealmente independiente. ■

Teorema 1.12 *Siempre existen n soluciones linealmente independientes de (P_H) en I.*

Demostración.

Sea $x_0 \in I$ y sea u_i, con $1 \leq i \leq n$, la única solución del *P.V.I.* de la ecuación diferencial (P_H) con la condición inicial

$$u_i^{(j)}(x_0) = \begin{cases} 1, & \text{si } j = i-1 \\ 0, & \text{si } j \neq i-1 \end{cases}$$

para $0 \leq j < n$, donde $u_i^{(0)} = u_i$. Como

$$W(u_1, u_2, \ldots, u_n)(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

entonces, por el Lema 1.10 y el Teorema 1.11, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es un conjunto de n soluciones linealmente independientes de (P_H) en I. ■

Definición 1.13 *Cualquier conjunto $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de soluciones de (P_H) que sea linealmente independiente en I se dice que es un* ***conjunto fundamental de soluciones*** *de (P_H) en I.*

Teorema 1.14 *Sea $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ un conjunto fundamental de soluciones de (P_H) en I. Entonces, cualquier solución de (P_H) se puede escribir como combinación lineal de $u_1, u_2, \ldots, u_n$.*

Demostración.

Sea u una solución de (P_H), $x_0 \in I$ y sean $\alpha_j = u^{(j)}(x_0)$ para $0 \leq j < n$. Consideremos una función w definida como

$$w(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \cdots + c_n u_n(x) \qquad \forall x \in I \tag{1}$$

con $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Buscamos los valores de estas constantes de tal forma que la función w verifique que $w^{(j)}(x_0) = \alpha_j$. Entonces, para x_0 se tiene que

$$\begin{array}{rcl} w(x_0) & = & c_1 u_1(x_0) + c_2 u_2(x_0) + \cdots + c_n u_n(x_0), \\ w'(x_0) & = & c_1 u_1'(x_0) + c_2 u_2'(x_0) + \cdots + c_n u_n'(x_0), \\ & \cdots & \\ w^{(n-1)}(x_0) & = & c_1 u_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 u_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_n u_n^{(n-1)}(x_0), \end{array}$$

es decir

$$\begin{pmatrix} u_1(x_0) & u_2(x_0) & \cdots & u_n(x_0) \\ u_1'(x_0) & u_2'(x_0) & \cdots & u_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x_0) & u_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & u_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Este sistema tiene solución única para $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ya que $W(u_1, u_2, \ldots, u_n)(x_0) \neq 0$ por ser $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ un conjunto fundamental de soluciones.

La función w es solución de (P_H), por ser combinación lineal de $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, y además verifica que $w^{(j)}(x_0) = \alpha_j$ para $0 \leq j < n$.

Por otro lado, la función u también es solución de (P_H) y verifica que $u^{(j)}(x_0) = \alpha_j$ para $0 \leq j < n$.

Por tanto, en virtud del Teorema 1.1, $u(x) = w(x)$ para todo $x \in I$. ■

Observación 1.15 *Del Teorema 1.14 se deduce fácilmente que no pueden existir más de n soluciones de (P_H) linealmente independientes puesto que cualquier solución de (P_H) se puede escribir como combinación lineal de n soluciones de (P_H) linealmente independientes.*

Observación 1.16 *En virtud de la Proposición 1.5 y este último resultado, se deduce que para determinar todas las soluciones de (P), basta con encontrar una solución u_P de (P) y un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea asociada (P_H), $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. De esta forma, cualquier solución u de (P) se puede escribir como:*

$$u(x) = u_P(x) + c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \cdots + c_n u_n(x) \qquad \forall x \in I \tag{2}$$

con $c_1, c_2, \ldots, c_n$ constantes. A la expresión $u_H(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \cdots + c_n u_n(x)$ se le denomina ***solución general de la ecuación diferencial homogénea****, (P_H), y a la expresión (2),* ***solución general de la ecuación diferencial completa****, (P).*

2. Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes

Una vez que conocemos la estructura de la solución general de una ecuación diferencial lineal, veremos como calcular un conjunto fundamental de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea, que como ya hemos demostrado en el Teorema 1.14 permite obtener la solución general de (P_H). Encontrar un conjunto fundamental de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea depende en gran medida de los coeficientes de ésta. Estudiaremos únicamente las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes.

Si el orden n de la ecuación diferencial es igual a uno, tenemos la ecuación diferencial de primer orden

$$au'(x) + bu(x) = 0$$

(con $a, b \in \mathbb{R}$ constantes), o equivalentemente

$$u'(x) = -\frac{b}{a}u(x) = \gamma u(x)$$

donde $\gamma = -\frac{b}{a}$. La solución general de esta ecuación diferencial es

$$u(x) = Ke^{\gamma x},$$

con $K \in \mathbb{R}$.

Para el caso $n = 2$, la ecuación diferencial será de la forma

$$au''(x) + bu'(x) + cu(x) = 0 \tag{3}$$

(con $a, b, c \in \mathbb{R}$ constantes). Un conjunto fundamental de soluciones de esta ecuación diferencial debe tener dos soluciones linealmente independientes. Una posibilidad es ensayar con funciones similares a las obtenidas para $n = 1$. Así, podríamos pensar que la función $u(x) = e^{\lambda x}$ podría ser solución de (3) para algún valor $\lambda \in \mathbb{R}$.

Estudiar si esta función es solución es sencillo:

$$au''(x) + bu'(x) + cu(x) = a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = \left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right)e^{\lambda x} = 0.$$

Puesto que $e^{\lambda x} \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, la única posibilidad para que $u(x)$ sea una solución es que

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

Por tanto, esta ecuación determina los valores de λ que hacen que $u(x) = e^{\lambda x}$ sea solución de (3). A esta ecuación se le denomina ***ecuación característica***. La ecuación característica viene dada por un polinomio de grado 2 en λ,

$$p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c,$$

que se llama ***polinomio característico***, y que, por tanto, puede tener dos soluciones reales, una única solución real (de multiplicidad dos) o dos soluciones complejas conjugadas. La

expresión analítica de dos soluciones linealmente independientes dependerá de las soluciones de la ecuación característica:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Así:

- Si $\boldsymbol{b^2 - 4ac > 0} \Rightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, soluciones de la ecuación característica; es decir,

$$\begin{aligned} u_1(x) &= e^{\lambda_1 x} \\ u_2(x) &= e^{\lambda_2 x} \end{aligned}$$

son dos soluciones de (3). Además son linealmente independientes, pues

$$W(u_1, u_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} \not\equiv 0.$$

Luego $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$ es un conjunto fundamental de soluciones y por tanto la solución general de (P_H) es

$$u(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

- Si $\boldsymbol{b^2 - 4ac = 0} \Rightarrow \exists! \lambda = -\dfrac{b}{2a} \in \mathbb{R}$ solución de la ecuación característica; es decir,

$$u_1(x) = e^{\lambda x}$$

es una solución de (3). En este caso tenemos que encontrar otra solución de (3). Ensayamos con

$$u_2(x) = x e^{\lambda x}$$

y comprobamos que también verifica (3). Para ello calculamos las dos primeras derivadas de u_2:

$$\begin{aligned} u_2'(x) &= e^{\lambda x} + x\lambda e^{\lambda x} = (1 + \lambda x) e^{\lambda x} \\ u_2''(x) &= \lambda e^{\lambda x} + (1 + \lambda x) \lambda e^{\lambda x} = \left(2\lambda + \lambda^2 x\right) e^{\lambda x} \end{aligned}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} a u_2''(x) + b u_2'(x) + c u_2(x) &= \left(a\left(2\lambda + \lambda^2 x\right) + b(1 + \lambda x) + cx\right) e^{\lambda x} \\ &= \left(x\left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right) + 2a\lambda + b\right) e^{\lambda x} \\ &= (2a\lambda + b) e^{\lambda x} = \left(2a\left(-\frac{b}{2a}\right) + b\right) e^{\lambda x} = 0 \end{aligned}$$

puesto que $\lambda = -\dfrac{b}{2a}$ es solución de la ecuación característica. Además, u_1 y u_2 son linealmente independientes. En efecto,

$$\begin{aligned} W(u_1, u_2)(x) &= \begin{vmatrix} e^{\lambda x} & x e^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & (1 + \lambda x) e^{\lambda x} \end{vmatrix} = e^{2\lambda x} \begin{vmatrix} 1 & x \\ \lambda & 1 + \lambda x \end{vmatrix} \\ &= (1 + \lambda x - \lambda x) e^{2\lambda x} = e^{2\lambda x} \not\equiv 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de (3) y la solución general de (P_H) es, en este caso,

$$u(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}.$$

- Si $\boldsymbol{b^2 - 4ac < 0} \Rightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ conjugados que son solución de la ecuación característica y por tanto

$$\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ tal que } \begin{cases} \lambda_1 = \alpha + \beta i \\ \lambda_2 = \alpha - \beta i \end{cases}.$$

Puesto que λ_1 y λ_2 son números complejos,

$$\begin{aligned} w_1(x) &= e^{\lambda_1 x} \\ w_2(x) &= e^{\lambda_2 x} \end{aligned}$$

son funciones complejas que son solución de (3). A partir de ellas podemos buscar dos funciones reales de variable real que también sean solución de (3). Por la Proposición 1.3, sabemos que cualquier combinación lineal de w_1 y w_2 también es solución de (3). Así,

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \frac{1}{2} w_1(x) + \frac{1}{2} w_2(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_2 x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{\alpha x} e^{\beta x i} + e^{\alpha x} e^{-\beta x i}\right) = \frac{1}{2} e^{\alpha x}\left(e^{\beta x i} + e^{-\beta x i}\right) \\ &= \frac{1}{2} e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) + i \operatorname{sen}(\beta x) + \cos(-\beta x) + i \operatorname{sen}(-\beta x)\right) \\ &= e^{\alpha x} \cos(\beta x) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} u_2(x) &= -\frac{i}{2} w_1(x) + \frac{i}{2} w_2(x) = -\frac{i}{2}\left(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}\right) \\ &= -\frac{i}{2}\left(e^{\alpha x} e^{\beta x i} - e^{\alpha x} e^{-\beta x i}\right) = -\frac{i}{2} e^{\alpha x}\left(e^{\beta x i} - e^{-\beta x i}\right) \\ &= -\frac{i}{2} e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) + i \operatorname{sen}(\beta x) - \cos(-\beta x) - i \operatorname{sen}(-\beta x)\right) \\ &= -i^2 e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x) = e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x) \end{aligned}$$

son también dos soluciones de (3). Además, u_1 y u_2 son dos funciones reales y son linealmente independientes:

$$\begin{aligned} W(u_1, u_2)(x) &= \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos(\beta x) & e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x) \\ e^{\alpha x}\left(\alpha \cos(\beta x) - \beta \operatorname{sen}(\beta x)\right) & e^{\alpha x}\left(\alpha \operatorname{sen}(\beta x) + \beta \cos(\beta x)\right) \end{vmatrix} \\ &= e^{2\alpha x}\left(\alpha \operatorname{sen}(\beta x) \cos(\beta x) + \beta \cos^2(\beta x) - \alpha \operatorname{sen}(\beta x) \cos(\beta x) + \beta \operatorname{sen}^2(\beta x)\right) \\ &= \beta e^{2\alpha x} \not\equiv 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $\{e^{\alpha x} \cos(\beta x), e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de (3) y la solución general de (P_H) es

$$u(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x).$$

Ejemplo 2.1 *Calcular la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas de coeficientes constantes de orden 2 .*

(a) $u''(x) + u'(x) - 6u(x) = 0$

Calculamos primero las soluciones de la ecuación característica:

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-6)}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2, \\ \lambda_2 = -3, \end{cases}$$

por tanto, un conjunto fundamental de soluciones vendrá dado por las funciones:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= e^{2x}, \\ u_2(x) &= e^{-3x}, \end{aligned}$$

y de esta forma, la solución general será:

$$u(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}.$$

(b) $y'' - 4y' + 4y = 0$

Empezamos calculando las raíces del polinomio característico:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4}}{2} = 2 \text{ (doble)},$$

por tanto, las funciones

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{2x}, \\ y_2(x) &= xe^{2x}, \end{aligned}$$

forman un conjunto fundamental de soluciones y la solución general de esta ecuación diferencial será:

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} = (c_1 + x c_2) e^{2x}.$$

(c) $u''(x) + u(x) = 0$

Resolvemos la ecuación característica:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-1} = \pm i \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = i, \\ \lambda_2 = -i, \end{cases}$$

es decir, un conjunto fundamental de soluciones está formado por

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \cos x, \\ u_2(x) &= \operatorname{sen} x, \end{aligned}$$

y por tanto, la solución general viene dada por:

$$u(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x.$$

(d) $u''(x) - 6u'(x) + 13u(x) = 0$

Calculamos las raíces del polinomio característico:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = 3 \pm 2i \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 + 2i, \\ \lambda_2 = 3 - 2i, \end{cases}$$

así, un conjunto fundamental de soluciones viene dado por

$$\begin{aligned} u_1(x) &= e^{3x} \cos(2x), \\ u_2(x) &= e^{3x} \operatorname{sen}(2x), \end{aligned}$$

y por tanto la solución general viene dada por:

$$u(x) = c_1 e^{3x} \cos(2x) + c_2 e^{3x} \operatorname{sen}(2x).$$

En el caso general de ecuaciones de orden n el procedimiento que se sigue es el mismo. En este caso tendríamos que dada una ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes,

$$a_n u^{(n)}(x) + \cdots + a_2 u''(x) + a_1 u'(x) + a_0 u(x) = 0,$$

se probaría, de forma análoga al caso de orden dos, que el polinomio característico es

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + \cdots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0,$$

y a partir de sus raíces podremos construir un conjunto fundamental de soluciones:

- Por cada raíz real simple λ del polinomio característico, la función $v(x) = e^{\lambda x}$ forma parte del conjunto fundamental de soluciones.

- Por cada raíz real λ de multiplicidad k del polinomio característico, las funciones $v_j(x) = x^j e^{\lambda x}$, con $0 \leq j < k$, forman parte del conjunto fundamental de soluciones.

- Por cada raíz compleja y su conjugado, $\lambda = \alpha \pm \beta i$, del polinomio característico, las funciones $v_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ y $v_2(x) = e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$ forman parte del conjunto fundamental de soluciones.

- Por cada par de raíces complejas y su conjugado, $\lambda = \alpha \pm \beta i$, de multiplicidad k del polinomio característico, las funciones $v_{j,1}(x) = x^j e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ y $v_{j,2}(x) = x^j e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$, con $0 \leq j < k$, forman parte del conjunto fundamental de soluciones.

Ejemplo 2.2 *Calcular la solución general de la ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes*

$$u'''(x) + 3u''(x) - 4u(x) = 0.$$

En este caso la ecuación característica es $\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = 0$ y tiene por solución $\lambda_1 = 1$ (simple) y $\lambda_2 = -2$ (doble). Por tanto, un conjunto fundamental de soluciones es $\{e^x, e^{-2x}, xe^{-2x}\}$, y la solución general es:

$$u(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x}.$$

Ejercicios propuestos

Calcular la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas de coeficientes constantes:

1. $3y''' - 19y'' + 36y' - 10y = 0$ Solución: $y(x) = c_1 e^{\frac{1}{3}x} + c_2 e^{3x}\cos x + c_3 e^{3x} \operatorname{sen} x$.

2. $u^{iv}(x) + 2u''(x) + u(x) = 0$ Solución: $u(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + c_3 x \cos x + c_4 x \operatorname{sen} x$.

3. $u''(x) - 10u'(x) + 29u(x) = 0$ Solución: $u(x) = c_1 e^{5x} cos(2x) + c_2 e^{5x} \operatorname{sen}(2x)$.

4. $u'''(x) - 3u'(x) + 2u(x) = 0$ Solución: $u(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} + c_3 x e^{x}$.

3. Método de los coeficientes indeterminados

Recordemos que para resolver una ecuación diferencial lineal de orden mayor que uno necesitamos encontrar un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea asociada y una solución particular de la no homogénea. En la Sección 2 hemos visto cómo calcular un conjunto fundamental de soluciones de (P_H). A continuación describiremos un método que nos servirá para calcular una solución particular de la completa.

En general, encontrar una solución particular de una ecuación diferencial es un trabajo muy complicado; sin embargo, si nos fijamos en la estructura de la ecuación diferencial que estamos estudiando, en muchos casos será posible ensayar con una función similar al término independiente, $b(x)$, que nos lleve a una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 3.1 *Calcular la solución general de la siguiente ecuación diferencial:*

$$u''(x) + 4u'(x) - 2u(x) = 2x^2 - 3x + 6.$$

Sabemos que la solución general de esta ecuación diferencial será:

$$u(x) = u_P(x) + c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x),$$

donde $\{u_1, u_2\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea asociada, (P_H). Calculamos u_1 y u_2; para ello, resolvemos la ecuación

$$u_H''(x) + 4u_H'(x) - 2u_H(x) = 0.$$

Por tanto, $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda - 2$, y sus raíces vendrán dadas por

$$p(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 2}}{2} = -2 \pm \sqrt{6},$$

es decir,

$$u_H(x) = c_1 e^{\left(-2+\sqrt{6}\right)x} + c_2 e^{\left(-2-\sqrt{6}\right)x}.$$

Únicamente faltaría calcular $u_P(x)$. Para ello, puesto que el lado derecho de la ecuación es un polinomio de grado 2, resulta lógico pensar que una solución u_P pueda ser un polinomio

del mismo grado. Por tanto, ensayamos con un polinomio de grado 2 con unos coeficientes a determinar, es decir,

$$u_P(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Comprobamos si existe algún valor para los coeficientes A, B, C de tal manera que u_P sea solución. Para ello necesitamos calcular las dos primeras derivadas de esta función y sustituir en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} u_P'(x) &= 2Ax + B, \\ u_P''(x) &= 2A, \end{aligned}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} u_P''(x) + 4u_p'(x) - 2u_P(x) &= (2A) + 4(2Ax + B) - 2\left(Ax^2 + Bx + C\right) \\ &= -2Ax^2 + (8A - 2B)x + (2A + 4B - 2C). \end{aligned}$$

Este polinomio así calculado y $b(x)$ son iguales,

$$-2Ax^2 + (8A - 2B)x + (2A + 4B - 2C) = 2x^2 - 3x + 6,$$

de modo que, identificando coeficientes, llegamos al siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rrrcr} -2A & & & = & 2 \\ 8A & -2B & & = & -3 \\ 2A & +4B & -2C & = & 6 \end{array}\right\}$$

cuya solución es $A = -1$, $B = -5/2$ y $C = -9$. Por tanto,

$$u_P(x) = -x^2 - \frac{5}{2}x - 9$$

y la solución general de la ecuación diferencial completa será

$$u(x) = -x^2 - \frac{5}{2}x - 9 + c_1 e^{\left(-2+\sqrt{6}\right)x} + c_2 e^{\left(-2-\sqrt{6}\right)x}.$$

Si nos fijamos en la manera de calcular la función u_P en este ejemplo, la idea ha sido sencilla: buscamos una función que al sustituir en la ecuación diferencial (derivando, sumando, etc...) nos dé un polinomio. Obviamente, una posibilidad (aunque no es la única) es un polinomio del mismo grado. Como veremos a continuación, si el lado derecho de la ecuación $b(x)$ es una función trigonométrica, tendremos que ensayar con una función trigonométrica; si fuera una exponencial, ensayaríamos con una función exponencial, etc... La función con la que ensayemos siempre dependerá de unos coeficientes que tenemos que determinar. A este método se le conoce como ***método de los coeficientes indeterminados***.

Observación 3.2 *Con este método hemos calculado una solución particular de la ecuación diferencial. Como veremos en la siguiente sección, existe otro método para el cálculo de soluciones particulares que podría llevarnos a distintas soluciones. Sin embargo, pensemos que estamos expresando la solución general de la ecuación diferencial de una forma concreta que depende de una solución particular y un conjunto fundamental de soluciones. Por supuesto, esta representación no es única.*

Ejemplo 3.3 *Calcular la solución general de la ecuación diferencial*

$$u''(x) - u'(x) + u(x) = 2\,\text{sen}(3x).$$

Igual que antes, empezamos resolviendo la ecuación diferencial homogénea, asociada

$$u_H''(x) - u_H'(x) + u_H(x) = 0,$$

cuya ecuación característica es

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} u_1(x) &= e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), \\ u_2(x) &= e^{\frac{x}{2}} \,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), \end{aligned}$$

es decir,

$$u_H(x) = c_1 e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 e^{\frac{x}{2}} \,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Buscamos ahora una solución particular. En este caso, puesto que $b(x) = 2\,\text{sen}(3x)$, resulta lógico pensar que la solución particular puede ser una combinación lineal de las funciones $\text{sen}(3x)$ y $\cos(3x)$. Así, ensayamos con:

$$\begin{aligned} u_P(x) &= A\,\text{sen}(3x) + B\cos(3x) \\ u_P'(x) &= 3A\cos(3x) - 3B\,\text{sen}(3x) \\ u_P''(x) &= -9A\,\text{sen}(3x) - 9B\cos(3x), \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial, se tiene que

$$u_P''(x) - u_P'(x) + u_P(x) = (-9A + 3B + A)\,\text{sen}(3x) + (-9B - 3A + B)\cos(3x).$$

Por tanto, identificando los coeficientes de esta última expresión con los de $b(x) = 2\,\text{sen}(3x)$, nos queda el siguiente sistema lineal de ecuaciones en A y B:

$$\left.\begin{array}{rrcl} -8A & +3B & = & 2 \\ -3A & -8B & = & 0 \end{array}\right\}$$

cuya solución es $A = -\frac{16}{73}$ y $B = \frac{6}{73}$. La solución general de la ecuación diferencial completa es

$$u(x) = -\frac{16}{73}\,\text{sen}(3x) + \frac{6}{73}\cos(3x) + c_1 e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 e^{\frac{x}{2}} \,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Ejemplo 3.4 *Calcular la solución general de la ecuación diferencial*

$$y'' - 2y' - 3y = 4x - 5 + 6xe^{2x}.$$

Empezamos resolviendo la ecuación diferencial homogénea asociada, cuya ecuación característica es

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3, \\ \lambda_2 = -1, \end{cases}$$

y por tanto

$$y_H(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}.$$

Puesto que $b(x)$ es la suma de un polinomio de grado 1 y del término xe^x, buscamos una solución particular ensayando en este caso con

$$y_P(x) = Ax + B + Ce^{2x} + Dxe^{2x}$$

De aquí,

$$\begin{aligned} y_P'(x) &= A + 2Ce^{2x} + De^{2x} + 2Dxe^{2x} = A + (2C + D)\, e^{2x} + 2Dxe^{2x}, \\ y_P''(x) &= 2(2C + D)\, e^{2x} + 2De^{2x} + 4Dxe^{2x} = (4C + 4D)\, e^{2x} + 4Dxe^{2x}, \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial,

$$y_P''(x) - 2y_P'(x) - 3y_P(x) = -3Ax + (-3B - 2A) + (-3C + 2D)\, e^{2x} - 3Dxe^{2x},$$

que, como en los ejemplos anteriores, nos permite obtener para los coeficientes A, B, C, D el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rrrrcr} -3A & & & & = & 4 \\ -2A & -3B & & & = & -5 \\ & & -3C & +2D & = & 0 \\ & & & -3D & = & 6 \end{array}\right\}$$

cuya solución es $A = -\frac{4}{3}$, $B = \frac{23}{9}$, $C = -\frac{4}{3}$ y $D = -2$. De esta forma, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - \frac{4}{3}e^{2x} - 2xe^{2x} + c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}.$$

Ejemplo 3.5 *Calcular la solución general de la ecuación diferencial*

$$y'' - 5y' + 4y = 8e^x.$$

La ecuación característica de la ecuación diferencial homogénea es

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial homogénea es

$$y_H(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^x.$$

Calculamos ahora una solución particular. Para ello, si observamos el lado derecho de la ecuación, la primera idea es ensayar con

$$y_P(x) = Ae^x = y'_P(x) = y''_P(x)$$

que si sustituimos en la ecuación diferencial nos queda:

$$y''_P(x) - 5y'_P(x) + 4y_P(x) = (A - 5A + 4A)\, e^x = 0.$$

En este caso no existe para ningún valor de A una solución de la ecuación diferencial no homogénea. En realidad, podíamos habernos dado cuenta de que $y_P(x) = Ae^x$ no es válida para ensayar, puesto que es una solución de la homogénea.

Buscamos otra posible solución de la ecuación diferencial no homogénea. Seguimos ensayando con funciones que dependan de e^x, por ejemplo,

$$y_P(x) = Axe^x$$

para la que se tiene que

$$\begin{aligned} y'_P(x) &= Ae^x + Axe^x, \\ y''_p(x) &= Ae^x + Ae^x + Axe^x = 2Ae^x + Axe^x. \end{aligned}$$

Al sustituir en la ecuación diferencial,

$$y''_P(x) - 5y'_P(x) + 4y_P(x) = (2A - 5A)\, e^x + (A - 5A + 4A)\, xe^x = -3Ae^x,$$

e igualar a $b(x) = 8e^x$, obtenemos $A = -\frac{8}{3}$. Por tanto, la solución general es

$$y(x) = -\frac{8}{3}xe^x + c_1e^{4x} + c_2e^x.$$

4. Método de Lagrange o de variación de las constantes

Existen ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas para las que ensayar con alguna función similar a la que aparece en el término independiente, $b(x)$, no proporciona ningún resultado. Por ejemplo, para la ecuación diferencial

$$u''(x) + u(x) = \operatorname{cosec} x,$$

ensayar con combinaciones lineales de funciones trigonométricas de tipo $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ o $\operatorname{cosec} x$ no permite encontrar $u_P(x)$.

En estos casos tendremos que recurrir a otro método que nos permita determinar alguna solución particular de la ecuación diferencial completa: el ***método de Lagrange***, o de ***variación de las constantes***, que es una generalización del método utilizado para resolver ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

En general, dada la ecuación lineal de segundo orden

$$a_2(x)\, u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_0(x)\, u(x) = b(x)$$

definida en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$, su ecuación homogénea asociada tiene dos soluciones linealmente independientes que denotaremos por u_1 y u_2. La solución general de la ecuación diferencial homogénea es por tanto

$$u_H(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x).$$

Igual que en el caso de las ecuaciones difereciales lineales de primer orden, para calcular la solución general de la ecuación no homogénea, sustituimos las constantes c_1 y c_2 por las funciones $c_1(x)$ y $c_2(x)$ respectivamente. Nuestro objetivo será ahora calcular dichas funciones $c_1(x)$ y $c_2(x)$ para las que

$$u_P(x) = c_1(x) u_1(x) + c_2(x) u_2(x)$$

sea solución de la ecuación diferencial no homogénea. Por tanto, derivando

$$\begin{aligned} u_P'(x) &= c_1'(x) u_1(x) + c_2'(x) u_2(x) + c_1(x) u_1'(x) + c_2(x) u_2'(x) \\ u_P''(x) &= \left(c_1'(x) u_1(x) + c_2'(x) u_2(x)\right)' + c_1'(x) u_1'(x) + c_2'(x) u_2'(x) \\ &\quad + c_1(x) u_1''(x) + c_2(x) u_2''(x) \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} b(x) &= a_2(x) u''(x) + a_1(x) u'(x) + a_0(x) u(x) \\ &= a_2(x) \left[\left(c_1'(x) u_1(x) + c_2'(x) u_2(x)\right)' + c_1'(x) u_1'(x) + c_2'(x) u_2'(x)\right] \\ &\quad + a_2(x) \left[c_1(x) u_1''(x) + c_2(x) u_2''(x)\right] \\ &\quad + a_1(x) \left[c_1'(x) u_1(x) + c_2'(x) u_2(x) + c_1(x) u_1'(x) + c_2(x) u_2'(x)\right] \\ &\quad + a_0(x) \left[c_1(x) u_1(x) + c_2(x) u_2(x)\right] \\ &= c_1(x) \left[a_2(x) u_1''(x) + a_1(x) u_1'(x) + a_0(x) u_1(x)\right] \\ &\quad + c_2(x) \left[a_2(x) u_2''(x) + a_1(x) u_2'(x) + a_0(x) u_2(x)\right] \\ &\quad + a_2(x) \left[\left(c_1'(x) u_1(x) + c_2'(x) u_2(x)\right)' + c_1'(x) u_1'(x) + c_2'(x) u_2'(x)\right] \\ &\quad + a_1(x) \left[c_1'(x) u_1(x) + c_2'(x) u_2(x)\right] \\ &= a_2(x) \left[\left(c_1'(x) u_1(x) + c_2'(x) u_2(x)\right)' + c_1'(x) u_1'(x) + c_2'(x) u_2'(x)\right] \\ &\quad + a_1(x) \left[c_1'(x) u_1(x) + c_2'(x) u_2(x)\right], \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que u_1 y u_2 son soluciones de la ecuación diferencial homogénea asociada. Si calculamos todas las funciones $c_1(x)$ y $c_2(x)$ que verifican

$$\begin{aligned} b(x) &= a_2(x) \left[\left(c_1'(x) u_1(x) + c_2'(x) u_2(x)\right)' + c_1'(x) u_1'(x) + c_2'(x) u_2'(x)\right] \\ &\quad + a_1(x) \left[c_1'(x) u_1(x) + c_2'(x) u_2(x)\right] \end{aligned}$$

tendremos la solución general de la ecuación diferencial completa. Sin embargo, sabemos que para calcular la solución general basta con obtener una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea y un conjunto fundamental de soluciones de la homogénea (que ya conocemos, $\{u_1, u_2\}$). De esta manera, es suficiente calcular una función $c_1(x)$ y otra $c_2(x)$, que verifiquen esta última ecuación. Por tanto, si $c_1(x)$ y $c_2(x)$ verifican

$$\left.\begin{array}{rcl} c_1'(x) u_1(x) + c_2'(x) u_2(x) &=& 0 \\ c_1'(x) u_1'(x) + c_2'(x) u_2'(x) &=& \dfrac{b(x)}{a_2(x)} \end{array}\right\} \tag{4}$$

tendremos que $u_P(x) = c_1(x) u_1(x) + c_2(x) u_2(x)$ es una solución particular de la ecuación diferencial completa.

Observemos que para calcular $c_1(x)$ y $c_2(x)$, puesto que u_1 y u_2 son funciones conocidas, tenemos, para cada $x \in I$, un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas bien definido, pues $a_2(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Además, dado que

$$W(u_1, u_2)(x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \text{para todo } x \in I,$$

al ser $\{u_1, u_2\}$ un conjunto linealmente independiente, se tiene que el sistema de ecuaciones (4) es compatible determinado. Resolviendo por el método de Cramer:

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & u_2(x) \\ \dfrac{b(x)}{a_2(x)} & u_2'(x) \end{vmatrix}}{W(u_1, u_2)(x)} \qquad \text{y} \qquad c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} u_1(x) & 0 \\ u_1'(x) & \dfrac{b(x)}{a_2(x)} \end{vmatrix}}{W(u_1, u_2)(x)}; \tag{5}$$

con lo que

$$c_1(x) = \int c_1'(x)\, dx \qquad \text{y} \qquad c_2(x) = \int c_2'(x)\, dx.$$

Observación 4.1 *En el caso de ecuaciones diferenciales de orden superior el procedimiento es análogo. Así, para la ecuación diferencial*

$$a_3(x) u'''(x) + a_2(x) u''(x) + a_1(x) u'(x) + a_0(x) u(x) = b(x),$$

una solución particular vendrá dada por

$$u_P(x) = c_1(x) u_1(x) + c_2(x) u_2(x) + c_3(x) u_3(x),$$

siendo $\{u_1, u_2, u_3\}$ *un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea y* $c_1(x), c_2(x)$ *y* $c_3(x)$ *funciones que verifican*

$$\left.\begin{array}{ccccccc} c_1'(x) u_1(x) & + & c_2'(x) u_2(x) & + & c_3'(x) u_3(x) & = & 0 \\ c_1'(x) u_1'(x) & + & c_2'(x) u_2'(x) & + & c_3'(x) u_3'(x) & = & 0 \\ c_1'(x) u_1''(x) & + & c_2'(x) u_2''(x) & + & c_3'(x) u_3''(x) & = & \dfrac{b(x)}{a_3(x)} \end{array}\right\}.$$

Ejemplo 4.2 *Calcular la solución general de la ecuación diferencial*

$$u''(x) + u(x) = \operatorname{cosec} x.$$

Como en los ejercicios anteriores, empezamos resolviendo la ecuación diferencial homogénea asociada, $u_H''(x) + u_H(x) = 0$, cuya ecuación característica es:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i,$$

y por tanto

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \cos x, \\ u_2(x) &= \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

Entonces, la solución de la ecuación diferencial homogénea asociada es

$$u_H(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x.$$

Utilizando el método de Lagrange, buscamos una solución particular u_P tal que

$$u_P(x) = c_1(x) \cos x + c_2(x) \operatorname{sen} x.$$

Las funciones $c_1(x)$ y $c_2(x)$ tienen que verificar el sistema (4), que en este caso, es:

$$\left.\begin{array}{lcl} c_1'(x) \cos x & + \; c_2'(x) \operatorname{sen} x & = \; 0 \\ c_1'(x)(-\operatorname{sen} x) & + \; c_2'(x) \cos x & = \; \operatorname{cosec} x \end{array}\right\}.$$

Aplicando el método de Cramer obtenemos la solución que viene dada por (5). Por tanto, calculamos primero el Wronskiano de $\{u_1, u_2\}$:

$$W(u_1, u_2)(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1,$$

luego,

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{cosec} x & \cos x \end{vmatrix}}{W(u_1, u_2)(x)} = -\operatorname{sen} x \operatorname{cosec} x = -1$$

y

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \operatorname{cosec} x \end{vmatrix}}{W(u_1, u_2)(x)} = \cos x \operatorname{cosec} x = \operatorname{cotg} x.$$

Obtenemos sus primitivas,

$$c_1(x) = \int -1 dx = -x$$

y

$$c_2(x) = \int \operatorname{cotg} x dx = \log(\operatorname{sen} x).$$

De esta manera, la solución general de la ecuación diferencial completa es

$$u(x) = -x \cos x + \log(\operatorname{sen} x) \operatorname{sen} x + c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x.$$

Ejemplo 4.3 *Calcular la solución general de la ecuación diferencial*

$$u'''(x) + u'(x) = \operatorname{tg} x.$$

Empezamos calculando la solución de problema homogéneo asociado:

$$0 = \lambda^3 + \lambda = \lambda(\lambda^2 + 1) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = i, \\ \lambda_3 = -i, \end{cases}$$

por tanto, un conjunto fundamental de soluciones está formado por las funciones $u_1(x) = 1$, $u_2(x) = \cos x$ y $u_3(x) = \operatorname{sen} x$, es decir,

$$u_H(x) = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x.$$

Utilizando el método de Lagrange, buscamos una solución particular de la forma

$$u_P(x) = c_1(x) + c_2(x) \cos x + c_3(x) \operatorname{sen} x$$

y calculamos $c_1(x)$, $c_2(x)$ y $c_3(x)$ que verifican el sistema

$$\left.\begin{array}{ccccccc} c_1'(x) & + & c_2'(x)\cos x & + & c_3'(x)\operatorname{sen} x & = & 0 \\ & & c_2'(x)(-\operatorname{sen} x) & + & c_3'(x)\cos x & = & 0 \\ & & c_2'(x)(-\cos x) & + & c_3'(x)(-\operatorname{sen} x) & = & \operatorname{tg} x \end{array}\right\}$$

que resolvemos mediante el método de Cramer. Para ello, obtenemos primero

$$W(u_1, u_2, u_3)(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ 0 & -\operatorname{sen} x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix} = 1$$

y a continuación

$$\begin{aligned} c_1'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ 0 & -\operatorname{sen} x & \cos x \\ \operatorname{tg} x & -\cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix}}{W(u_1, u_2, u_3)(x)} = \operatorname{tg} x, \\ c_2'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \operatorname{sen} x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \operatorname{tg} x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix}}{W(u_1, u_2, u_3)(x)} = -\cos x \operatorname{tg} x = -\operatorname{sen} x, \\ c_3'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen} x & 0 \\ 0 & -\cos x & \operatorname{tg} x \end{vmatrix}}{W(u_1, u_2, u_3)(x)} = -\operatorname{sen} x \operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

Calculamos ahora las primitivas de estas funciones:

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int \operatorname{tg} x dx = -\log(\cos x), \\ c_2(x) &= \int -\operatorname{sen} x dx = \cos x, \\ c_3(x) &= \int -\operatorname{sen} x \operatorname{tg} x dx = \int -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} dx = \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} dx \\ &= \int \left(\cos x - \frac{1}{\cos x}\right) dx = \operatorname{sen} x - \int \frac{1}{\cos x} dx. \end{aligned}$$

Para calcular esta última primitiva, multiplicamos y dividimos por $\cos x$ y hacemos el cambio de variable $t = \operatorname{sen} x$, con lo que tenemos:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos x}dx &= \int \frac{1}{\cos^2 x}\cos x dx = \int \frac{1}{1-t^2}dt = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{1+t} + \frac{\frac{1}{2}}{1-t}\right)dt \\ &= \frac{1}{2}\left(\log(1+t) - \log(1-t)\right) = \frac{1}{2}\log\frac{1+t}{1-t} = \frac{1}{2}\log\frac{(1+t)^2}{1-t^2} \\ &= \frac{1}{2}\log\frac{(1+\operatorname{sen} x)^2}{\cos^2 x} = \log\frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x} = \log(\sec x + \operatorname{tg} x),\end{aligned}$$

de modo que,

$$c_3(x) = \operatorname{sen} x - \log(\sec x + \operatorname{tg} x).$$

Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$u(x) = -\log(\cos x) + \cos^2 x + (\operatorname{sen} x - \log(\sec x + \operatorname{tg} x))\operatorname{sen} x + c_1 + c_2\cos x + c_3 \operatorname{sen} x.$$

Ejercicios propuestos

1. $u''(x) - 6u'(x) + 9u(x) = 6x^2 + 2$

Solución: $u(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{2}{3} + c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}.$

2. $u''(x) - 3u'(x) + 2u(x) = 14\operatorname{sen}(2x) - 18\cos(2x)$

Solución: $u(x) = 2\operatorname{sen}(2x) + 3\cos(2x) + c_1e^x + c_2e^{2x}.$

3. $u''(x) + u'(x) = x\cos x$

Solución: $u(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \cos x + \frac{1}{2}x\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x\cos x + c_1 + c_2e^{-x}$

4. $u'''(x) + u(x) = 4x + 2$

Solución: $u(x) = 4x+2+c_1e^{-x}+c_2e^{\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+c_3e^{\frac{1}{2}x}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$

5. $u''(x) - 3u'(x) + 2u(x) = e^{3x}\operatorname{sen}(e^x)$

Solución: $u(x) = (e^x\cos(e^x) - \operatorname{sen}(e^x))\,e^x - \cos(e^x)e^{2x} + c_1e^x + c_2e^{2x}.$

5. Ejercicios resueltos con Maple

Ejercicio 1. Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u'''(x) + 4u'(x) = \cos^2 x \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 1 \\ u''(0) = 1 \end{cases}$$

```
> restart:with(plots):
```

La ecuación que tenemos que resolver es:

```
> ecuacion:=diff(y(x),x,x,x)+4*diff(y(x),x)=(cos(x))^2;
```

$$ecuacion := \frac{d^3}{dx^3}y(x) + 4\frac{d}{dx}y(x) = (\cos(x))^2$$

Buscamos, en primer lugar, la solución general de la ecuación homogénea asociada; para ello resolvemos la ecuación característica:

```
> EC:=l^3+4*l=0;
```

$$EC := l^3 + 4\,l = 0$$

```
> solve({EC},{l});
```

$$\{l = 0\},\ \{l = 2\,i\},\ \{l = -2\,i\}$$

A la vista de los valores de l, un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea está formado por las funciones $u1(x)$, $u2(x)$ y $u3(x)$:

```
> u1:=x->1;
```

$$u1 := x \mapsto 1$$

```
> u2:=x->cos(2*x);
```

$$u2 := x \mapsto \cos(2\,x)$$

```
> u3:=x->sin(2*x);
```

$$u3 := x \mapsto \sin(2\,x)$$

y, por tanto, su solución general se escribe como

```
> ugH:=x->C1*u1(x)+C2*u2(x)+C3*u3(x);
```

$$ugH := x \rightarrow\ C1u1(x) + C2u2(x) + C3u3(x)$$

```
> ugH(x);
```

$$C1 + C2\ \cos(2\,x) + C3\ \sin(2\,x)$$

Para encontrar una solución particular de la ecuación completa aplicaremos el método de variación de las constantes. Supondremos, entonces, que existen funciones $c1(x)$, $c2(x)$ y $c3(x)$ tales que $upC(x) = c1(x)u1(x) + c2(x)u2(x) + c3(x)u3(x)$ sea la solución particular que vamos buscando. Estas funciones se obtendrán resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones, donde $c1p$, $c2p$ y $c3p$ representan las derivadas de $c1(x)$, $c2(x)$ y $c3(x)$, respectivamente.

```
> ecu1:=c1p*u1(x)+c2p*u2(x)+c3p*u3(x)=0;
```

$$ecu1 := c1p + c2p\ \cos(2\,x) + c3p\ \sin(2\,x) = 0$$

```
> ecu2:=c1p*diff(u1(x),x)+c2p*diff(u2(x),x)+c3p*diff(u3(x),x)=0;
```

$$ecu2 := -2\ c2p\ \sin(2\,x) + 2\ c3p\ \cos(2\,x) = 0$$

```
> ecu3:=c1p*diff(u1(x),x,x)+c2p*diff(u2(x),x,x)+
  c3p*diff(u3(x),x,x)=(cos(x))^2;
```

$$ecu3 := -4\ c2p\ \cos(2\,x) - 4\ c3p\ \sin(2\,x)$$

```
> solve({ecu1,ecu2,ecu3},{c1p,c2p,c3p});
```

$$\left\{ c1p = 1/4\,(\cos(x))^2,\ c2p = -1/4\,\frac{(\cos(x))^2\ \cos(2\,x)}{(\cos(2\,x))^2 + (\sin(2\,x))^2},\ c3p = -1/4\,\frac{\sin(2\,x)\,(\cos(x))^2}{(\cos(2\,x))^2 + (\sin(2\,x))^2} \right\}$$

```
> simplify(%);
```

$$\left\{ c1p = 1/4\,(\cos(x))^2,\ c2p = -1/4\,(\cos(x))^2\left(2\,(\cos(x))^2 - 1\right),\ c3p = -1/2\,\sin(x)\,(\cos(x))^3 \right\}$$

Ahora integramos $c1p$, $c2p$ y $c3p$ para obtener las funciones $c1(x)$, $c2(x)$ y $c3(x)$.

```
> Int((1/4)*cos(x)^2,x)=int((1/4)*cos(x)^2,x);
```

$$\int 1/4\,(\cos(x))^2\,dx = 1/8\,\sin(x)\cos(x) + 1/8\,x$$

```
> c1:=x->(1/8)*sin(x)*cos(x)+1/8*x;
```

$$c1 := x \mapsto 1/8\,\sin(x)\cos(x) + 1/8\,x$$

```
> Int(-(1/4)*cos(x)^2*(2*cos(x)^2-1),x)=int(-(1/4)*cos(x)^2*(2*cos(x)^2-1),x);
```

$$\int -1/4\,(\cos(x))^2\left(2\,(\cos(x))^2 - 1\right)dx = -1/8\,\sin(x)\,(\cos(x))^3 - 1/16\,\sin(x)\cos(x) - 1/16\,x$$

```
> c2:=x->-(1/8)*sin(x)*cos(x)^3-(1/16)*sin(x)*cos(x)-(1/16)*x;
```

$$c2 := x \mapsto -1/8\,\sin(x)\,(\cos(x))^3 - 1/16\,\sin(x)\cos(x) - 1/16\,x$$

```
> Int(-(1/2)*sin(x)*cos(x)^3,x)=int(-(1/2)*sin(x)*cos(x)^3,x);
```

$$\int -1/2\,\sin(x)\,(\cos(x))^3\,dx = 1/8\,(\cos(x))^4$$

```
> c3:=x->(1/8)*cos(x)^4;
```

$$c3 := x \mapsto 1/8\,(\cos(x))^4$$

La solución particular de la ecuación diferencial completa será, entonces,

```
> upC:=x->c1(x)*u1(x)+c2(x)*u2(x)+c3(x)*u3(x);
```

$$upC := x \to c1(x)u1(x) + c2(x)u2(x) + c3(x)u3(x)$$

```
> upC(x);
```

$$1/8\,\sin(x)\cos(x) + 1/8\,x + \left(-1/8\,\sin(x)\,(\cos(x))^3 - 1/16\,\sin(x)\cos(x) - 1/16\,x\right)\cos(2\,x) + 1/8\,(\cos(x))^4\sin(2\,x)$$

y la solución general de la ecuación diferencial completa vendrá dada por

```
> ugC:=x->upC(x)+ugH(x);
```

$$ugC := x \to upC(x) + ugH(x)$$

```
> ugC(x);
```

$$1/8\,\sin(x)\cos(x) + 1/8\,x + \left(-1/8\,\sin(x)\,(\cos(x))^3 - 1/16\,\sin(x)\cos(x) - 1/16\,x\right)\cos(2\,x) + 1/8\,(\cos(x))^4\sin(2\,x) + C1 + C2\,\cos(2\,x) + C3\,\sin(2\,x)$$

Podemos comprobar que, en efecto, esta expresión obtenida para $ugC(x)$ verifica la ecuación diferencial propuesta:

```
> simplify(diff(ugC(x),x,x,x)+4*diff(ugC(x),x)-(cos(x))^2);
```

$$0$$

Imponiendo las condiciones iniciales, obtenemos los parámetros $C1$, $C2$ y $C3$ que determinan la solución particular del problema de valor inicial.

```
> simplify(diff(ugC(x),x));
```

$$1/4\,\sin(x)\cos(x)\,x - 4\,C2\,\sin(x)\cos(x) - 2\,C3 + 1/4\,(\cos(x))^2 + 4\,(\cos(x))^2\,C3$$

```
> dugC:=x->(1/4)*sin(x)*cos(x)*x-4*C2*sin(x)*cos(x)-2*C3+
(1/4)*cos(x)^2+4*cos(x)^2*C3;
```

$$dugC := x \mapsto 1/4\,\sin(x)\cos(x)\,x + \sin(x)\cos(x) - 2\,C3 + 1/4\,(\cos(x))^2 + 4\,(\cos(x))^2\,C3$$

```
> simplify(diff(ugC(x),x,x));
```

$$-8\,C3\,\sin(x)\cos(x) - 1/4\,\sin(x)\cos(x) - 1/4\,x + 4\,C2 + 1/2\,(\cos(x))^2\,x - 8\,(\cos(x))^2\,C2$$

```
> d2ugC:=x->-8*C3*sin(x)*cos(x)-(1/4)*sin(x)*cos(x)-(1/4)*x+4*C2+
(1/2)*cos(x)^2*x-8*cos(x)^2*C2;
```

$$d2ugC := x \mapsto -8\,C3\,\sin(x)\cos(x) - 1/4\,\sin(x)\cos(x) - 1/4\,x - 1 + 1/2\,(\cos(x))^2\,x + 2\,(\cos(x))^2$$

```
> solve({ugC(0)=0,dugC(0)=1,d2ugC(0)=1},{C1,C2,C3});
```

$$\{C1 = 1/4,\, C2 = -1/4,\, C3 = 3/8\}$$

Sustituimos en la expresión de $ugC(x)$ el valor de las constantes $C1, C2$ y $C3$ obtenidas

```
> subs({C1=1/4,C2 =-1/4,C3=3/8},ugC(x));
```

$$1/8\,\sin(x)\cos(x) + 1/8\,x + \left(-1/8\,\sin(x)\,(\cos(x))^3 - 1/16\,\sin(x)\cos(x) - 1/16\,x\right)\cos(2\,x) + 1/8\,(\cos(x))^4\sin(2\,x) + 1/4 - 1/4\,\cos(2\,x) + 3/8\,\sin(2\,x)$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{15}{16}\sin(x)\cos(x) - 1/8\,(\cos(x))^2\,x - 1/2\,(\cos(x))^2 + 3/16\,x + 1/2$$

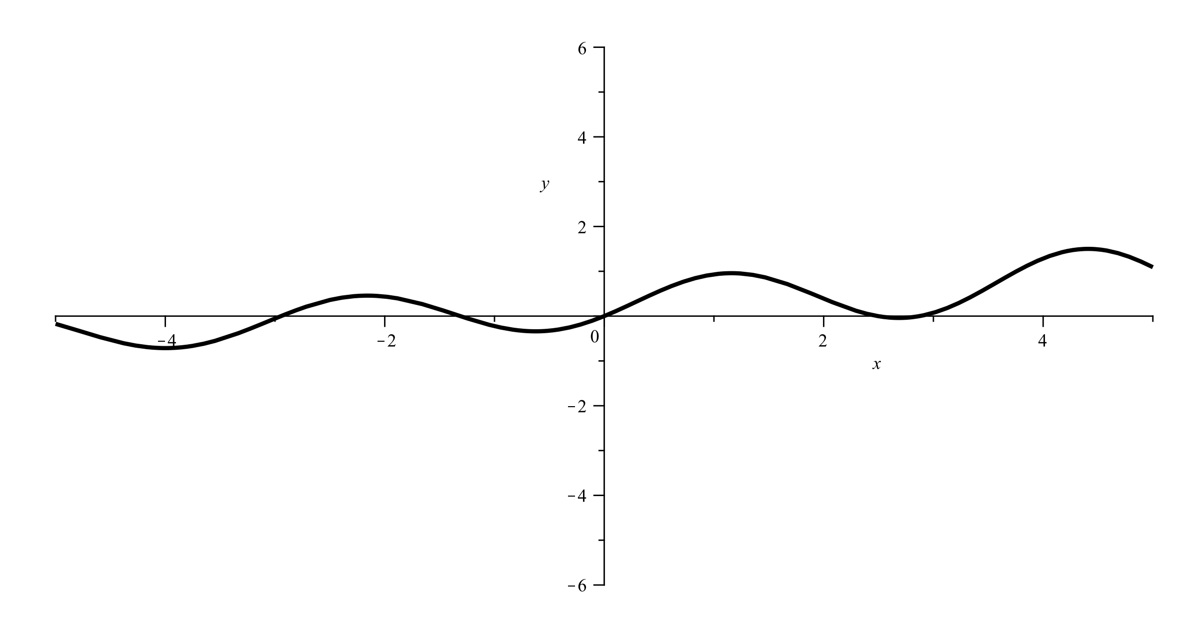
y llegamos a la solución del problema de valor inicial: la función $u_pvi(x)$:

```
> u_pvi:=x->(15/16)*sin(x)*cos(x)-(1/8)*cos(x)^2*x-
(1/2)*cos(x)^2+(3/16)*x+1/2;
```

$$u_pvi := x \mapsto \frac{15}{16}\sin(x)\cos(x) - 1/8\,(\cos(x))^2\,x - 1/2\,(\cos(x))^2 + 3/16\,x + 1/2$$

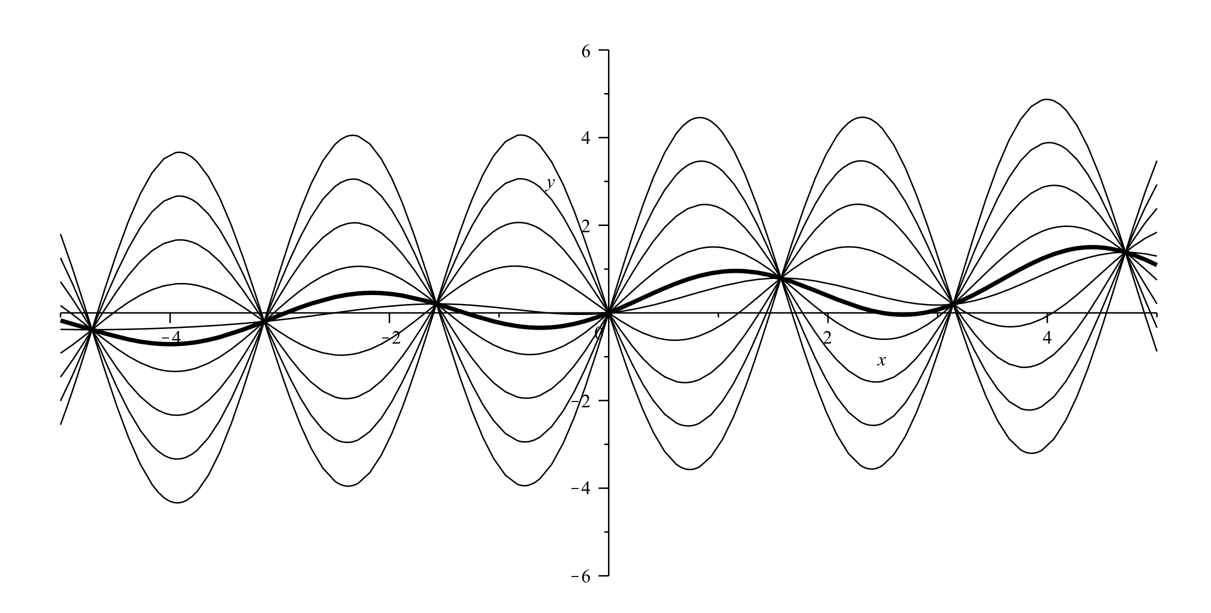
cuya representacion gráfica es

```
> sol_pvi:=plot(u_pvi(x),x=-5..5,y=-2..2,color=black,thickness=3):
> display(sol_pvi);
```



Para finalizar el ejercicio, representamos gráficamente la solución particular obtenida junto con algunas curvas de la familia $ugC(x)$:

```
> ugC:=x->upC(x)+ugH(x):
> C1:=1/4:C2:=-1/4:familia:=seq(plot(ugC(x), x = -5 .. 5, y = -6 .. 6,
color=black,thickness=1), C3=-4..4):
> display(familia,sol_pvi);
```



Ejercicio 2. Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u'''(x) + 7u''(x) + 16u'(x) + 12u(x) = 12x^3 - 2x + 3e^{-3x} \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = -3 \\ u''(0) = 0 \end{cases}$$

```
> restart:with(plots):
```

Definimos la ecuación diferencial que tenemos que resolver:

```
> ecuacion:=diff(u(x),x,x,x)+7*diff(u(x),x,x)+16*diff(u(x),x)+12*u(x)=
12*x^3-2*x+3*exp(-3*x);
```

$$ecuacion := \frac{d^3}{dx^3}u(x) + 7\frac{d^2}{dx^2}u(x) + 16\frac{d}{dx}u(x) + 12\,u(x) = 12\,x^3 - 2\,x + 3\,e^{-3\,x}$$

y resolvemos la ecuación característica para obtener la solución de la ecuación diferencial homogénea asociada:

```
> solve({l^3+7*l^2+16*l+12=0},{l});
```

$$\{l = -3\}, \{l = -2\}, \{l = -2\}$$

de modo que, un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea estará formado por las funciones $u1(x), u2(x)$ y $u3(x)$ dadas por

```
> u1:=x->exp(-3*x);
```

$$u1 := x \mapsto e^{-3\,x}$$

```
> u2:=x->exp(-2*x);
```

$$u2 := x \mapsto e^{-2\,x}$$

```
> u3:=x->x*exp(-2*x);
```

$$u3 := x \mapsto xe^{-2\,x}$$

y su solución general vendrá dada por

```
> ugH:=x->C1*u1(x)+C2*u2(x)+C3*u3(x);
```

$$ugH := x \mapsto C1\,u1(x) + C2\,u2(x) + C3\,u3(x)$$

```
> ugH(x);
```

$$C1\,e^{-3\,x} + C2\,e^{-2\,x} + C3\,xe^{-2\,x}$$

Para obtener una solución particular de la ecuación completa aplicamos el método de los coeficientes indeterminados; puesto que $b(x) = 12x^3 - 2x + 3e^{-3x}$ y al ser e^{-3x} una solución particular de la homogénea, podemos ensayar con

```
> u_particular:=x->A*x^3+B*x^2+C*x+D+E*x*exp(-3*x);
```

$$u_particular := x \mapsto Ax^3 + Bx^2 + Cx + D + Exe^{-3\,x}$$

Sustituimos esta función en la ecuación diferencial completa para poder determinar los coeficientes A, B, C, D, y E.

```
> eval(ecuacion,u(x)=u_particular(x));
```

$6\,A + E\mathrm{e}^{-3\,x} + 42\,Ax + 14\,B + 48\,Ax^2 + 32\,Bx + 16\,C + 12\,Ax^3 + 12\,Bx^2 + 12\,Cx + 12\,D = 12\,x^3 - 2\,x + 3\,\mathrm{e}^{-3\,x}$

e, identificando coeficientes, llegamos al siguiente sistema de ecuaciones en A, B, C, D y E :

```
> solve({12*A=12,48*A+12*B=0,42*A+32*B+12*C=-2,6*A+14*B+16*C+12*D=0,E=3},
{A,B,C,D,E});
```

$$\left\{A = 1, B = -4, C = 7, D = -\frac{31}{6}, E = 3\right\}$$

Por tanto, una solución particular de la completa viene dada por

```
> subs({A = 1, B = -4, C = 7, D = -31/6, E = 3},u_particular(x));
```

$$x^3 - 4\,x^2 + 7\,x - \frac{31}{6} + 3\,x\mathrm{e}^{-3\,x}$$

```
> upC:=x->x^3-4*x^2+7*x-31/6+3*x*exp(-3*x);
```

$$upC\ :=\ x \mapsto x^3 - 4\,x^2 + 7\,x - \frac{31}{6} + 3\,x\mathrm{e}^{-3\,x}$$

y la solución general de la completa será, entonces,

```
> ugC:=x->ugH(x)+upC(x);
```

$$ugC\ :=\ x \mapsto ugH(x) + ugC(x)$$

```
> ugC(x);
```

$$C1\,\mathrm{e}^{-3\,x} + C2\,\mathrm{e}^{-2\,x} + C3\,x\mathrm{e}^{-2\,x} + x^3 - 4\,x^2 + 7\,x - \frac{31}{6} + 3\,x\mathrm{e}^{-3\,x}$$

Podemos comprobar que, en efecto, esta expresión obtenida para ugC(x) verifica la ecuación diferencial propuesta:

```
> diff(ugC(x),x,x,x)+7*diff(ugC(x),x,x)+16*diff(ugC(x),x)+12*ugC(x)
-12*x^3+2*x-3*exp(-3*x);
```

$$0$$

Para resolver el *P.V.I.* imponemos las condiciones iniciales dadas en el enunciado,

```
> diff(ugC(x),x);
```

$$-3\,C1\,\mathrm{e}^{-3\,x} - 2\,C2\,\mathrm{e}^{-2\,x} + C3\,\mathrm{e}^{-2\,x} - 2\,C3\,x\mathrm{e}^{-2\,x} + 3\,x^2 - 8\,x + 7 + 3\,\mathrm{e}^{-3\,x} - 9\,x\mathrm{e}^{-3\,x}$$

```
> dugC:=x->-3*C1*exp(-3*x)-2*C2*exp(-2*x)+C3*exp(-2*x)-2*C3*x*exp(-2*x)+
3*x^2-8*x+7+3*exp(-3*x)-9*x*exp(-3*x);
```

$$dugC\ :=\ x \mapsto -3\,C1\,\mathrm{e}^{-3\,x} - 2\,C2\,\mathrm{e}^{-2\,x} + C3\,\mathrm{e}^{-2\,x} - 2\,C3\,x\mathrm{e}^{-2\,x} + 3\,x^2 - 8\,x + 7 + 3e^{-3x} - 9\,x\mathrm{e}^{-3\,x}$$

```
> diff(ugC(x),x,x);
```

$$9\,C1\,\mathrm{e}^{-3\,x} + 4\,C2\,\mathrm{e}^{-2\,x} - 4\,C3\,\mathrm{e}^{-2\,x} + 4\,C3\,x\mathrm{e}^{-2\,x} + 6\,x - 8 - 18\,\mathrm{e}^{-3\,x} + 27\,x\mathrm{e}^{-3\,x}$$

```
> d2ugC:=x->9*C1*exp(-3*x)+4*C2*exp(-2*x)-4*C3*exp(-2*x)+4*C3*x*exp(-2*x)
+6*x-8-18*exp(-3*x)+27*x*exp(-3*x);
```

$$d2ugC\ :=\ x \mapsto 9\,C1\,\mathrm{e}^{-3\,x} + 4\,C2\,\mathrm{e}^{-2\,x} - 4\,C3\,\mathrm{e}^{-2\,x} + 4\,C3\,x\mathrm{e}^{-2\,x} + 6\,x - 8 - 18\,\mathrm{e}^{-3\,x} + 27\,x\mathrm{e}^{-3\,x}$$

```
> solve({ugC(0)=1,dugC(0)=-3,d2ugC(0)=0},{C1,C2,C3});
```

$$\{C1 = -4/3,\ C2 = 15/2,\ C3 = -2\}$$

Sustituimos el valor de las constantes $C1, C2$ y $C3$ obtenidas en la expresión de $ugC(x)$

```
> subs({C1 = -4/3, C2 = 15/2, C3 = -2},ugC(x));
```

$$-4/3\,\mathrm{e}^{-3\,x}+15/2\,\mathrm{e}^{-2\,x}-2\,x\mathrm{e}^{-2\,x}+x^3-4\,x^2+7\,x-\frac{31}{6}+3\,x\mathrm{e}^{-3\,x}$$

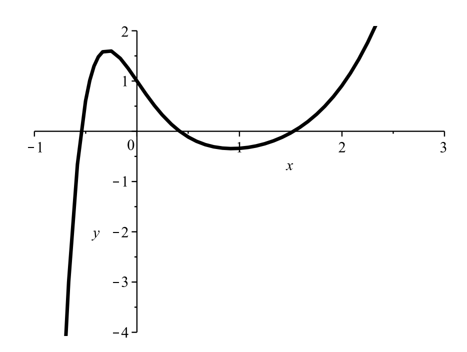
y llegamos a la solución del problema de valor inicial: la función $u_pvi(x)$:

```
> u_pvi:=x->-(4/3)*exp(-3*x)+(15/2)*exp(-2*x)-2*x*exp(-2*x)
+x^3-4*x^2+7*x-31/6+3*x*exp(-3*x);
```

$$u_pvi := x \mapsto -4/3\,\mathrm{e}^{-3\,x}+15/2\,\mathrm{e}^{-2\,x}-2\,x\mathrm{e}^{-2\,x}+x^3-4\,x^2+7\,x-\frac{31}{6}+3\,x\mathrm{e}^{-3\,x}$$

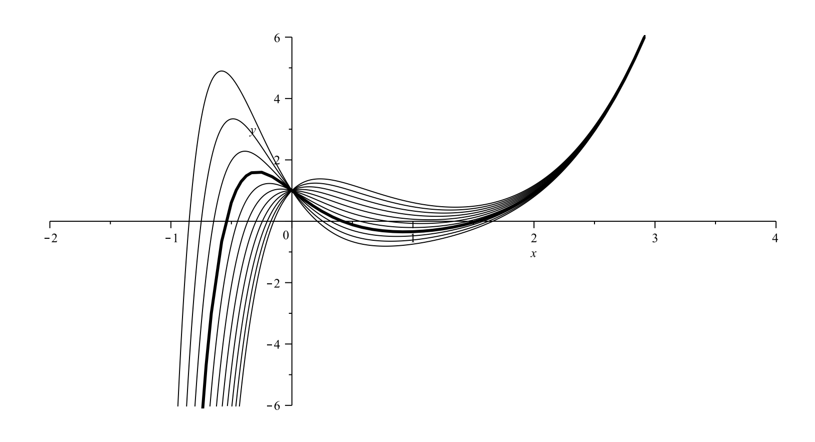
Su representación gráfica es

```
> sol_pvi:=plot(u_pvi(x),x=-1..3,y=-4..2,color=black,thickness=3):
> display(sol_pvi);
```



Finalizamos el ejercicio representando gráficamente esta solución junto con algunas de las curvas solución de la ecuación completa.

```
> ugC:=x->ugH(x)+upC(x):
> C1:=-4/3:C2:=15/2:familia:=seq(plot(ugC(x), x = -2 .. 4, y = -6 .. 6,
color=black,numpoints=500), C3=-5..5):
> display(familia,sol_pvi);
```



Ejercicios propuestos

1. Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u'''(x) + u''(x) + 4u'(x) + 4u(x) = 8x^3 - 2x^2 + 1 - 10 \operatorname{sen} x \\ u(0) = -9 \\ u'(0) = 0 \\ u''(0) = -11 \end{cases}$$

Solución: $u(x) = -\frac{1}{5}e^{-x} - \frac{29}{30}\cos 2x - \frac{64}{15}\operatorname{sen} 2x - \frac{5}{3}\operatorname{sen} x + \frac{5}{3}\cos x + 2x^3 - \frac{13}{2}x^2 + 10x - \frac{19}{2}$

2. Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u'''(x) + u'(x) = \operatorname{tg}(x)\sec(x) \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 0 \\ u''(0) = 1 \end{cases}$$

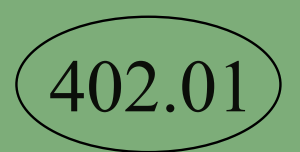
Solución: $u(x) = x \operatorname{sen} x + \cos x \log(\cos x) + 1$

NOTAS

NOTAS

NOTAS

CUADERNO



Cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

